Komposition binärer quadratischer Formen

Kneser, Martin

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 33, 1982,
S.41-42

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Komposition binärer quadratischer Formen

Von **Martin Kneser,** Göttingen

Gauß hat in seinen Disquisitiones Arithmeticae die Frage beantwortet, wann sich eine ganzzahlige quadratische Form durch eine bilineare Substitution in ein Produkt zweier quadratischer Formen transformieren läßt. Dedekind hat in seinen Supplementen zu Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie den Zusammenhang mit Moduln in quadratischen Zahlkörpern hergestellt. Spätere Autoren haben diese Begriffe auf andere Klassen von Ringen übertragen (s. [1] und die dort angegebene Literatur), wobei die Definition der eigentlichen Äquivalenz einige Komplikationen verursacht und Ringe, in denen 2 Nullteiler ist, nicht behandelt werden.

Die folgenden Ergebnisse zeigen, daß mit Hilfe von Clifford-Algebren die Komposition binärer quadratischer Formen über beliebigen kommutativen Ringen in einfacher Weise und ganz analog zu Dedekinds Konstruktion im klassischen Fall behandelt werden kann. Beweise finden sich in [2].

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, M ein binärer quadratischer R-Modul, d. h. ein projektiver R-Modul vom Rang 2 mit quadratischer Form q,

$$\ker(M) = \{x \in M \mid q(x+y) = q(y) \text{ für alle } y \in M\}.$$

Alle weiteren Überlegungen beruhen auf der einfachen Bemerkung, daß die gerade Clifford-Algebra $C^+(M)$ in natürlicher Weise auf M operiert, und daß M dadurch zu einem invertierbaren Modul über $C^+(M)$ wird, falls q primitiv ist, d. h. wenn das von q(M) erzeugte Ideal Rq(M) gleich R ist. Unter einer Kompositionsabbildung zwischen quadratischen Moduln M_1, M_2, M mit Formen q_1, q_2, q verstehen wir eine bilineare Abbildung $\mu: M_1 \times M_2 \to M$, die $q(\mu(x_1, x_2)) = q_1(x_1)q_2(x_2)$ erfüllt.

Satz 1. *Ist* μ *eine Kompositionsabbildung zwischen primitiven binären quadratischen Moduln* M_1, M_2, M, *und ist* $\ker(M_i) = 0$, *so gibt es eindeutig bestimmte Homomorphismen* $\gamma_i: C^+(M_i) \to C^+(M)$ *derart, daß*

$$(*) \qquad \mu(c_1x_1, c_2x_2) = \gamma_1(c_1)\gamma_2(c_2)\mu(x_1, x_2)$$

gilt für $x_i \in M_i$, $c_i \in C^+(M_i)$.

Ist C eine quadratische R-Algebra, und ist ein Isomorphismus $C^+(M) \to C$ gegeben (wodurch M zu einem C-Modul wird), so sagen wir, M sei vom Typ C. Sind weiter M_i vom Typ C_i und $\gamma_i: C_i \to C$ Homomorphismen quadratischer Algebren, so heißt eine Kompositionsabbildung μ vom Typ (γ_1, γ_2), falls (*) für $x_i \in M_i$, $c_i \in C_i$ gilt.

Satz 2. *Zu gegebenen primitiven binären quadratischen Moduln* M_i *vom Typ* C_i *und Homomorphismen* $\gamma_i: C_i \to C$ *gibt es einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten* *primitiven binären quadratischen Modul vom Typ* C *und eine Komposition* $\mu: M_1 \times M_2 \to M$ *vom Typ* (γ_1, γ_2).

Satz 3. *Die Isomorphieklassen primitiver binärer quadratischer Moduln vom Typ* C *bilden eine abelsche Gruppe* G(C), *und es gilt eine exakte Sequenz*

$$C^\times \to R^\times \to G(C) \to \mathrm{Pic}(C) \to \mathrm{Pic}(R),$$

wo die beiden äußeren Pfeile durch die Norm $n: C \to R$ *induziert sind.*

Literatur

[1] J. Towber, Composition of oriented binary quadratic form-classes over commutative rings, Advances in Math. 36 (1980) 1–107.
[2] M. Kneser, Composition of binary quadratic forms, erscheint im J. of Number Theory.